WYBRANE ZAGADNIENIA PROJEKTOWANIA I ANALIZY SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

<u>1. Uwagi wstępne.</u>

Przez ***„system obsługi masowej”*** rozumie się różnego rodzaju urządzenia ze ***stanowiskami obsługi (kanałami obsługi)***, do których zgłaszają się w stałych lub losowych odstępach czasu ***klienci***, którzy chcą być obsłużeni.

Przykładami tego rodzaju systemów może być:

Numer systemu obsługi	***Klient***	***Stanowisko obsługi Kanał obsługi***	***Rodzaj obsługi***
1	statek	nabrzeże portowe	załadunek lub rozładunek statku
2	pacjent	gabinet lekarski	badanie stanu zdrowia pacjenta
3	abonent telefoniczny	centrala telefoniczna	połączenie z wybranym numerem
4	samochód	stacja benzynowa	tankowanie paliwa
5	samochód	stacja obsługi samochodów	naprawa samochodu (badanie stanu technicznego)
6	maszyna	konserwator maszyn	naprawa uszkodzonej maszyny
7	widz kinowy	kasa biletowa	sprzedaż biletu do kina
8	kupujący w supermarkecie	kasa supermarketu	pobieranie należności za towar

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Gdy wszystkie stanowiska obsługi są zajęte, to zgłaszający się klient ma dwie możliwości:

- zrezygnować z obsługi
- ustawić się w kolejce (nie jest to skutkiem złej organizacji pracy, lecz faktem obiektywnym wynikającym z losowego czasu przybywania klientów do stanowisk obsługi oraz losowego czasu trwania ich obsługi)

<u>Uwaga:</u>

Całkowita likwidacja kolejek (przez znaczne zwiększenie liczby stanowisk obsługi) jest rozwiązaniem nie tylko ekonomicznie najgorszym ***(najbardziej kosztownym)***, ale także fizycznie ***niemożliwym*** (zmniejszeniu się liczby klientów oczekujących na obsługę towarzyszyć będzie znaczny wzrost liczby niewykorzystanych stanowisk obsługi oczekujących na klientów - powstaje zatem ***inny rodzaj kolejki***).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Aby skrócić czas oczekiwania klientów w kolejce na obsługę menadżer systemu może:

- zwiększyć ilość stanowisk obsługi,
- skrócić czas obsługi klientów przez wszystkie kanały obsługi lub tylko ich część,

Uwaga:

Oba rozwiązania wymagają poniesienia ***dodatkowych kosztów*** na inwestycje oraz powodują, że ***wydłuży się czas*** w którym wszystkie stanowiska obsługi lub ich część ***będą niewykorzystane*** (system ponosi wtedy niepotrzebne straty). Menadżer systemu musi podjąć decyzje, które są pewnym ***kompromisem*** pomiędzy ***interesami klientów*** (brak kolejek, szybszy czas obsługi) oraz ***interesami zarządzającego systemem*** (niższe koszty funkcjonowania systemu, brak strat).

Zakres zastosowań ***teorii masowej obsługi*** obejmuje różne dziedziny działalności ludzkiej. Teoria ta znalazła zastosowanie m.in. przy rozwiązywaniu bardzo wielu ***problemów ekonomicznych***. Do zadań z teorii masowej obsługi należą również zadania z zakresu ***teorii niezawodności,*** oraz ***zarządzania zapasami***.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

2. Struktura systemów obsługi i ich podstawowe elementy.

Systemy masowej obsługi (jak np. wielkie przedsiębiorstwa, systemy zaopatrzeniowo – magazynowe, systemy transportu miejskiego) poza dużą różnorodnością indywidualnych właściwości posiadają wiele wspólnych cech. Główną ich wspólną cechą jest występowanie w nich trzech podstawowych elementów:

- ***Źródło zgłoszeń*** - zbiór potencjalnych ***zgłoszeń*** (klienci, życzenia, potrzeby, przedmioty) do systemu, które czekają na ***obsługę*** (sprzedaż, przegląd, obróbkę) przez urządzenia obsługujące.
- ***Urządzenia obsługujące*** (***kanały obsługi***) - realizują obsługę na podstawie zgłoszeń wchodzących do systemu. Mogą to być zarówno obsługujący zgłoszenia ***ludzie*** jak i ***maszyny.***
- ***Kolejka*** (powstaje, gdy liczba wolnych kanałów obsługi jest mniejsza od liczby zgłoszeń). Nie jest to jedynie ***zbiór oczekujących na obsługę***, ale także pewna struktura podlegająca pewnemu zbiorowi reguł – ***regulamin kolejki***.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Charakterystyka wejściowego strumienia zgłoszeń.

Zgłoszenia wchodzące do systemu (pojedynczo lub grupowo) tworzą tzw. ***wejściowy strumień zgłoszeń***. Strumień zgłoszeń jest ***określony*** - jeśli znane są prawidłowości rządzące powstawaniem zgłoszenia w przedziale czasu $[t, t+T]$ od chwili „t" – powrotu jego do źródła do chwili „t+T" ponownego jego pojawienia się w systemie (znana jest ***probabilistyczna charakterystyka*** zmiennej losowej „T") oraz ***liczba zgłoszeń*** „N".

Jeżeli w wejściowym strumieniu zgłoszeń nie występują przypadki pojawienia się dwóch lub większej liczby zgłoszeń (tzw. ***strumień pojedynczy***), to jest on w pełni charakteryzowany za pomocą długości przedziału czasu „ξ_n" pomiędzy kolejnym (n – „tym", n=1,2,3,...) oraz poprzednim (n-1 – „szym") zgłoszeniem.

Wejściowy strumień zgłoszeń może być ***strumieniem regularnym*** (zgłoszenia wpływają w jednakowych odstępach czasu: $\xi_n = const$). W praktyce przypadek ten bardzo rzadko występuje (czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami zależy od bardzo wielu czynników przypadkowych). Zatem najczęściej wejściowy strumień zgłoszeń jest ***strumieniem losowym*** (ξ_n - są zmiennymi losowymi o określonych funkcjach rozkładu prawdopodobieństwa).

Jeżeli długości przedziałów czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami nie wpływają wzajemnie na siebie (zmienne losowe ξ_n - są niezależne), to strumień nazywa się ***strumieniem bez następstw*** (***bez pamięci***). W szczególności, gdy zmienne losowe ξ_n mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa to taki strumień nazywa się ***strumieniem rekurencyjnym***.

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

W zależności od typu rozkładu zmiennych losowych ξ_n strumienie rekurencyjne posiadają pewne specyficzne nazwy. Często w systemach obsługi masowej rozpatruje się wejściowy rekurencyjny strumień zgłoszeń będący tzw. ***strumieniem Poissona.***

Dla wejściowego strumienia zgłoszeń ***typu Poissona*** zmienne losowe $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ (n=1,2,...) określające czas pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami są zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym, a zatem posiadają rozkład prawdopodobieństwa określony za pomocą dystrybuanty postaci:

$$F(t) = P(\xi_n < t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}; \quad \lambda > 0, t \geq 0.$$

Wynika to z poniższego twierdzenia

Twierdzenie:

Jeśli proces zgłoszeń do systemu jest ***procesem Poissona*** z intensywnością $\lambda > 0$, to odstępy czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami (zmienne losowe ξ_n) posiadają ten sam ***rozkład wykładniczy*** z parametrem $\lambda > 0$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Niech $X(t)$ - będzie ***sygnałowym procesem Poissona*** (proces jednorodny o przyrostach niezależnych i pojedynczy) oraz oznacza ilość sygnałów (zgłoszeń) jakie pojawiły się w przedziale czasu [0,t].

Dla strumienia wejściowego będącego ***strumieniem Poissona*** prawdopodobieństwo zdarzenia, że w przedziale [0,t] pojawiło się „k" – zgłoszeń (sygnałów) wynosi:

$$P(X(t)=k)=e^{-\lambda\cdot t}\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!};k=0,1,2,...$$

Oczekiwana (średnia) ilość zgłoszeń (sygnałów) w przedziale czasu [0,t] wynosi zatem: $E[X(t)]=\lambda\cdot t$. Stąd parametr „$\lambda>0$" – interpretujemy jako ilość zgłoszeń w jednostce czasu, a więc jako ***intensywność zgłoszeń*** dla strumienia typu Poissona.

W praktycznych zastosowaniach rozważa się także wejściowy strumień zgłoszeń ***typu Erlanga*** (rzędu „k"). W tym przypadku strumień napływających zgłoszeń może być ***strumieniem Poissona***, lecz do obsługi dopuszcza się tylko jedno (ostatnie) z każdych „k" – kolejno napływających zgłoszeń.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- Jeżeli dla dowolnej skończonej liczby rozłącznych przedziałów czasu: $[t_1, t_1 + \Delta_1), \ldots, [t_r, t_r + \Delta_r)$ prawdopodobieństwo pojawienia się w tych przedziałach odpowiednio: $k_1, \ldots, k_r$ - zgłoszeń zależy tylko od długości tych przedziałów, a nie od położenia względem pozostałych przedziałów, to strumień wejściowy nazywa się ***strumieniem stacjonarnym***.
- Jeżeli strumień wejściowy jest: stacjonarny, pojedynczy oraz bez następstw, to jest tzw. ***strumieniem prostym***.

Charakterystyka mechanizmu obsługi.

Teoria masowej obsługi bada procesy, w których z jednej strony powstaje zapotrzebowanie na wykonanie pewnych prac (usług), a z drugiej powstaje konieczność zaspokojenia tych potrzeb. Związane jest to z odpowiednim mechanizmem obsługi, który ***określa sposoby postępowania ze zgłoszeniami***, ale ***od strony kanału obsługi***.

Do podstawowych charakterystyk kanału obsługi należą:

- ***Czas trwania obsługi.***
- ***Zdolność przepustowa systemu***
- ***Dostępność systemu***

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

__Czas trwania obsługi__ - to przedział czasu niezbędny dla realizacji obsługi dla pojedynczego zgłoszenia.

Przyjmuje się, że czasy trwania obsługi dla poszczególnych zgłoszeń są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowych rozkładach.

Jeżeli jednak występuje ***kilka rodzajów zgłoszeń***, to każdy rodzaj ma ***własny czas trwania*** obsługi. Podobnie każdy ***kanał obsługi*** (jeśli jest ich wiele) może posiadać własny czas trwania obsługi.

Typ rozkładu czasu trwania obsługi określa nazwę odpowiedniej obsługi (możemy mieć do czynienia z obsługą: ***wykładniczą, deterministyczną, Erlanga, dowolną***). Badania systemów obsługi masowej pokazują, że najczęściej rozkład czasu trwania obsługi jest ***rozkładem wykładniczym***.

Niech η_k - oznacza czas konieczny do obsługi „k-tego" zgłoszenia (k=1,2,...) Zakładając ponadto, że zmienne losowe $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład, to rozkład prawdopodobieństwa dla wykładniczego czasu trwania obsługi „k – tego" zgłoszenia określa dystrybuanta: $B(t) = P(\eta_k < t) = 1 - e^{-\nu \cdot t}$.

Stąd otrzymujemy, że ***średni czas trwania obsługi*** dla jednego zgłoszenia (w przypadku rozkładu wykładniczego) wynosi: $t_{śr} = E[\eta_k] = \dfrac{1}{\nu}$. Odwrotność średniego czasu obsługi nazywamy ***intensywnością obsługi***: $\nu = \dfrac{1}{t_{śr}}$ (liczba zgłoszeń obsłużona w jednostkowym przedziale czasu).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Jeżeli system obsługi jest systemem wieloetapowym (każde zgłoszenie jest obsługiwane przez jeden kanał w ***„m"*** etapach), zaś czas trwania obsługi dla każdego etapu ma identyczny rozkład wykładniczy, to rozkład pełnego czasu trwania obsługi (po zakończeniu wszystkich etapów) jest ***rozkładem Erlanga*** postaci: $B(t) = P(\eta < t) = 1 - e^{-\nu t}\left[1 + \frac{\nu \cdot t}{1!} + \frac{(\nu \cdot t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\nu \cdot t)^m}{m!}\right]$

Zdolność przepustowa systemu – to ***maksymalna liczba zgłoszeń***, które mogą być jednocześnie obsługiwane przez system.

W zależności od liczby jednocześnie obsługiwanych zgłoszeń rozróżniamy systemy: ***jednokanałowe*** (tylko jedno zgłoszenie w tym samym czasie obsługiwane) oraz ***wielokanałowe*** (więcej niż jedno zgłoszenie może być jednocześnie obsługiwane).

W praktyce spotyka się również tzw. ***systemy wielofazowe*** (każde zgłoszenie musi przejść przez kilka kanałów obsługi i przy każdym z nich może czekać w kolejce).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

<u>**Dostępność systemu**</u> – określa dostęp zgłoszeń do różnych kanałów obsługi. System jest w ***pełni dostępny***, gdy każde zgłoszenie może być obsłużone przez dowolny kanał. Jeżeli jest to niemożliwe, to system należy do grupy systemów ***niepełnodostępowych***.

Najczęściej w systemach masowej obsługi zgłoszenia są obsługiwane zgodnie z ***kolejnością*** ich napływania. Mogą jednak zdarzyć się takie systemy obsługi, w których niektóre zgłoszenia są ***uprzywilejowane*** (systemy z ***priorytetem***).

Mogą być to systemy z ***priorytetem bezwzględnym*** (przerywana jest obsługa zgłoszeń o niższym priorytecie) oraz o ***priorytecie względnym*** (zgłoszenie o wyższym priorytecie musi czekać na zakończenie rozpoczętej obsługi zgłoszenia o niższym priorytecie). Możliwe zasady obsługi zgłoszeń zawiera ***regulamin*** (dyscyplina) obsługi.

<u>**Uwaga:**</u> Do charakterystyk mechanizmu obsługi należy również ***niezawodność kanału obsługi*** (określa się ją za pomocą odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa dla ***przedziału czasu sprawnej - niezawodnej pracy*** kanału obsługi oraz dla ***przedziału czasu trwania jego odnowy*** – naprawy w sytuacji awarii).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Charakterystyka regulaminu kolejek.

Regulamin kolejki – to reguła wyboru zgłoszenia, które ma zostać obsłużone, gdy tylko zakończy się obsługa poprzedniego.
Jeżeli zgłoszenia ustawiają się w kolejce w kolejności ich przybywania to taki porządek tworzenia kolejki nazywa się ***naturalnym***.
Występują też inne zasady w ***regulaminie kolejki***: wybór zgłoszenia, którego obsługa zajmuje najmniej czasu, ***losowy*** wybór zgłoszeń, ***priorytetowy*** (względny lub bezwzględny) wybór zgłoszeń oraz ***mieszany*** wybór zgłoszeń.
Regulamin kolejki obejmuje również:

- Ograniczenia liczby oczekujących zgłoszeń (***systemy z odmową*** lub ze stratą).
- Ograniczenia dotyczące czasu oczekiwania na obsługę oraz pobytu zgłoszenia w systemie (mogą być to wielkości stałe lub zmienne losowe).
- Przepisy regulujące możliwości przechodzenia z jednej kolejki do drugiej.

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

3. Klasyfikacja systemów masowej obsługi.

Najczęściej systemy masowej obsługi charakteryzowane są za pomocą kodu zaproponowanego przez D. G. Kendalla (jednego z twórców teorii). Oznaczenie systemu masowej obsługi ma postać: $X|Y|n|N|f_i^j$, gdzie:

„X" – oznacza typ strumienia wejściowego,

„Y" – oznacza typ rozkładu czasu trwania obsługi,

Przyjmuje się kod X=M – oznaczający Poissonowski (Markowski) strumień zgłoszeń (wykładniczy rozkład czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami), Y=M – wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi, X=D – deterministyczne (regularne) zgłoszenia klientów do systemu, Y=D – stały czas obsługi, X=G – dowolny proces zgłoszeń klientów do systemu, Y=G – dowolny rozkład prawdopodobieństw czasu trwania obsługi, $X=E_k$ – rozkład Erlanga (z parametrami λ, k) odstępów czasu między zgłoszeniami, $Y=E_k$ - rozkład Erlanga (z parametrami ν, k) prawdopodobieństw czasu trwania obsługi.

„n" – liczba kanałów w systemie (system z nieograniczoną liczbą kanałów obsługi oznacza się $n=\infty$),

„N" – maksymalna liczba miejsc oczekiwania (systemy z odmową mają N=0, dla nieograniczonej kolejki $N=\infty$),

f_i^j - regulamin obsługi (wskaźnik „i") i regulamin kolejki (wskaźnik „j")

Znaczenie indeksów: „i=0" – ***niepriorytetowa*** obsługa (porządek naturalny FIFO lub odwrotny LIFO), „i=1" ***względny*** priorytet obsługi, „i=2" – ***bezwzględny*** priorytet obsługi, „j=0" – priorytet w kolejce ***nie obowiązuje*** (zgłoszenie, które zastaje wszystkie miejsca zajęte w kolejce odchodzi), „j=2" – ***bezwzględny*** priorytet zgłoszeń (zgłoszenie z wyższym priorytetem usuwa z kolejki jedno zgłoszenie z niższym priorytetem).

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

4. Przykłady systemów masowej obsługi i ich podstawowe charakterystyki.

Bardzo ważną charakterystyką systemów masowej obsługi jest prawdopodobieństwo: $P_k(t) = P(V_t = k)$ - losowo wchodzące do systemu zgłoszenie w chwili „t" zastaje w nim „k" innych zgłoszeń (jako „k-te" ustawia się w kolejce). Rozkład tego prawdopodobieństwa zależy od czasu. W praktyce można jednak zauważyć, że dla pewnych systemów (***systemy stabilne***) wpływ czasu na charakterystyki zmniejsza się wraz z jego upływem. Jest to ważna własność ustalania się tzw. ***trybu stacjonarnego systemu***. Wariant stacjonarny interpretuje się jako graniczny wariant systemu niestacjonarnego: $\lim_{t\to\infty} P_k(t) = P_k$.

Nie dla każdego systemu ***wariant stacjonarny istnieje***. Systemy z ograniczoną liczbą miejsc oczekiwania zawsze mają wariant stacjonarny, gdy intensywności zgłoszeń (parametr λ) oraz obsługi (parametr ν) są skończone. Dla systemów z nieograniczoną liczbą miejsc oczekiwania wariant regularny istnieje tylko wtedy, gdy tzw. ***współczynnik obciążenia*** (zajętości systemu) $\frac{\lambda}{n\nu} < 1$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|1|\infty$ - jest to jednokanałowy system obsługi, z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanał obsługi posiada wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0<\nu<\infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0<\lambda<\infty$). Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa zgodnie z kolejnością przybyć do systemu (porządek naturalny). Dla takiego systemu ***wariant regularny*** istnieje (system jest stabilny), gdy $\lambda<\nu$ (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych). Wyznaczymy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho=\dfrac{\lambda}{\nu}$ (dla tego systemu jest to ***obciążenie systemu***), to prawdopodobieństwo $P_k=(1-\rho)\rho^k$, k=0,1,2,...

Prawdopodobieństwo, że w systemie w kolejce oczekuje więcej niż r_0 zgłoszeń wynosi:

$$P(r>r_0)=P_{r_0+2}+P_{r_0+3}+\ldots=(1-\rho)\rho^{r_0+2}+(1-\rho)\rho^{r_0+3}+\ldots=$$

$$=(1-\rho)\rho^{r_0+2}\left[1+\rho+\rho^2+\ldots\right]=\rho^{r_0+2}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń w systemie obsługi wynosi: $E[V] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \frac{\rho}{1-\rho}$,

Wariancja liczby zgłoszeń w systemie obsługi wynosi:

$$D^2[V] = E[V^2] - E[V]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k - \left(\sum_{k=0}^{\infty} kP_k\right)^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2},$$

Średnia liczba zgłoszeń oczekujących w kolejce wynosi: $\sum_{k=1}^{\infty} kP_{k+1} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$,

Wariancja liczby zgłoszeń znajdujących się w kolejce wynosi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 P_{k+1} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} kP_{k+1}\right)^2 = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}$$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(T > t_0) = \rho e^{-(\nu-\lambda)t_0}$$

Średni czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce (na obsługę) oraz jego wariancja wynoszą: $E[T] = \dfrac{\rho}{\nu-\lambda}$, $D^2[T] = \dfrac{\rho(2-\rho)}{(\nu-\lambda)^2}$,

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie przebywać w systemie dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(Z > t_0) = e^{-(\nu-\lambda)t_0}$$

Średni całkowity czas przebywania zgłoszenia w systemie oraz jego wariancja wynoszą: $E[Z] = \dfrac{1}{\nu-\lambda}$, $D^2[Z] = \dfrac{1}{(\nu-\lambda)^2}$,

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|\infty$ - jest to system obsługi składający się z „n" kanałów obsługi z oczekiwaniem (nieograniczoną liczbą miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0<\nu<\infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0<\lambda<\infty$). Zgłoszenia czekają w kolejce tylko wtedy, gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte. Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (***w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału***) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (***porządek naturalny***). Dla takiego systemu ***wariant regularny*** istnieje (system jest stabilny), gdy $\lambda<n\nu$ (średnio w jednostce czasu mniej przybywa zgłoszeń niż jest obsługiwanych przez wszystkie kanały). Wyznaczymy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho=\frac{\lambda}{\nu}$, to prawdopodobieństwo: $P_k=\frac{\rho^k}{k!}P_0$, dla k=0,1,2,...,n, oraz $P_k=\frac{\rho^k}{n!n^{k-n}}P_0$, dla k=n+1,n+2,..., gdzie: $P_0=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)}\right)^{-1}$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie ***będzie obsłużone bez czekania*** (w systemie znajduje się co najwyżej n-1 zgłoszeń) wynosi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right)$$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie ***będzie oczekiwało w kolejce*** wynosi:

$$\Pi = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0 = \frac{n}{n-\rho} P_n$$

Prawdopodobieństwo, że $1 \le s_0 \le n-1$ ***kanałów obsługi jest zajętych*** wynosi: $P(S = s_0) = P_{s_0} = \frac{\rho^{s_0}}{s_0\,!} P_0$

Prawdopodobieństwo, że ***długość kolejki wynosi*** $r_0 \ge 0$ obliczamy ze wzoru:

$$P(R = r_0) = P_{n+r_0} = \frac{\rho^{n+r_0}}{n!n^{r_0}} P_0$$

Prawdopodobieństwo, że ***w kolejce oczekuje więcej*** niż $r_0 \ge 0$ zgłoszeń wynosi:

$$P(R > r_0) = P_{n+r_0+1} + P_{n+r_0+2} + \ldots = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0+1}} P_0 \left[1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \ldots \right] =$$

$$= \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0+1}} P_0 \frac{n}{n-\rho} = \frac{\rho^{n+r_0+1}}{n!n^{r_0}(n-\rho)} P_0$$

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń w kolejce wynosi: $\sum_{r=0}^{\infty} rP_{n+r} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!}\frac{1}{(n-\rho)^2}P_0$

Średnia liczba zajętych kanałów (istotna informacja dla zarządzającego systemem) wynosi: $\sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k = \rho = \frac{\lambda}{\nu}$. Zatem ***średnia liczba wolnych kanałów*** wynosi: $n-\rho = n-\frac{\lambda}{\nu} = n\left(1-\frac{\lambda}{n\nu}\right)$.

Średnia liczba zgłoszeń w systemie wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \rho + P_0\frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!}\frac{1}{(n-\rho)^2}$$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie będzie czekać w kolejce dłużej niż $t_0 \geq 0$ jednostek czasu wyznacza się następująco:

$$P(T > t_0) = \frac{n}{n-\rho}P_n e^{-(n-\rho)\nu \cdot t_0}$$

Średni czas oczekiwania na obsługę (w kolejce) oraz jego ***wariancja*** wynoszą: $E[T] = \frac{\Pi}{n\nu-\lambda} = \frac{\Pi}{(n-\rho)\nu}$; $D^2[T] = \frac{\Pi(2-\Pi)}{n\nu-\lambda} = \frac{\Pi(2-\Pi)}{(n-\rho)\nu}$

WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M \mid M \mid n \mid N$ - jest to system obsługi składający się z „n" kanałów obsługi z odmową (ograniczona liczba „$N < \infty$" miejsc w kolejce). Kanały obsługi posiadają wykładniczy rozkład czasu trwania obsługi dla każdego zgłoszenia o intensywności $0 < \nu < \infty$, zaś strumień wejściowy jest pojedynczym niezależnym strumieniem rekurencyjnym Poissona (ze stałą intensywnością $0 < \lambda < \infty$). W omawianym systemie może znajdować się jednocześnie najwyżej „n+N" zgłoszeń, z których „n" - będzie obsługiwanych, zaś „N" – będzie czekać w kolejce. Napływające w tym czasie zgłoszenia otrzymują ***odmowę*** i odchodzą nie obsłużone. Przyjete zgłoszenia albo od razu są obsługiwane (jeśli jest wolny kanał) lub czekają w kolejce (jeśli wszystkie kanały obsługi są zajęte). Kolejka jest jedna i wspólna dla wszystkich kanałów obsługi. Zakłada się ponadto, że w systemie występuje obsługa (***w chwili zwolnienia jakiegokolwiek kanału***) zgodnie z kolejnością przybyć zgłoszeń do systemu (***porządek naturalny***). Dla takiego systemu ***wariant regularny (system jest stabilny)*** istnieje zawsze. Wyznaczymy zatem charakterystyki tego systemu w wariancie stacjonarnym (ustabilizowanym). Oznaczmy przez $\rho = \dfrac{\lambda}{\nu}$, to prawdopodobieństwo:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \text{ dla } k=0,1,2,\dots,n, \quad \text{oraz } P_k = \frac{\rho^k}{n! n^{k-n}} P_0, \text{ dla } k=n+1,n+2,\dots,n+N,$$

gdzie: $P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\rho}{n} \right)^k \right)^{-1}$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie nie zostanie przyjęte (dostanie odmowę)***, czyli ***prawdopodobieństwo straty zgłoszenia*** wynosi:

$$P_{n+N} = \frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^N P_0$$

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie zostanie przyjęte*** do obsługi (procentowa przepustowość systemu – ***g***) wynosi: $g = 1 - P_{n+N}$

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie będzie obsłużone bez czekania*** wynosi: $\sum_{k-0}^{n-1} P_k = P_0 \sum_{k-0}^{n-1}\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie ***będzie musiało czekać w kolejce*** wynosi: $\sum_{k=0}^{N-1} P_{n+k} = P_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k$

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

Średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w kolejce wynosi:
$$\sum_{k=1}^{N} kP_{n+k} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{\rho}{n}\right)^k$$

Średnia liczba zajętych kanałów wynosi: $\sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=1}^{N} nP_{n+k} = \rho(1-P_{n+N})$.

Średnia ***liczba wolnych kanałów*** (z powodu braku zgłoszeń) wynosi: $n-\rho(1-P_{n+N})$.

Średnia liczba zgłoszeń w systemie (równa średniej liczbie zajętych kanałów obsługi plus średniej liczbie zgłoszeń czekających w kolejce) wynosi:
$$E[V] = \rho(1-P_{n+N}) + \frac{\rho^n}{n!} P_0 \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{\rho}{n}\right)^k$$

Średnia liczba zgłoszeń, które ***otrzymały odmowę*** wynosi: λP_{n+N} (w jednostce czasu). Średni ***odstęp czasu między dwoma kolejnymi zgłoszeniami***, które otrzymały odmowę wynosi: $\frac{1}{\lambda P_{n+N}}$.

Średnia ***liczba wolnych miejsc w kolejce*** jest równa: N - E[V].

Średni czas oczekiwania na rozpoczęcie obsługi (oczekiwania w kolejce) wynosi: $E[T] = \frac{n\nu P_n}{(n\nu-\lambda)^2}\left[1-(N+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^N + N\left(\frac{\rho}{n}\right)^{N+1}\right]$.

❑ WYBRANE ZAGADNIENIA SYSTEMÓW MASOWEJ OBSŁUGI

- **System typu** $M|M|n|0$ - jest to szczególny przypadek systemu poprzedniego, w którym występuje ***strata zgłoszeń*** (każde zgłoszenie, które przychodzi i zastaje wszystkie kanały obsługi zajęte odchodzi nie obsłużone). Dla tego systemu prawdopodobieństwo:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \text{ dla k=0,1,2,...,n, gdzie: } P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) \right)^{-1}.$$

Prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie nie zostanie przyjęte*** (stracone) wyraża się wzorem: $P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$, zaś prawdopodobieństwo, że ***zgłoszenie zostanie przyjęte*** (a tym samym ***obsłużone bez czekania***) wynosi:

$$1 - P_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0.$$

Średnia ***liczba zajętych kanałów obsługi*** (tym samym średnia ***liczba zgłoszeń w systemie***) wynosi:

$$E[V] = \sum_{k=0}^{n} nP_k = \rho \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) P_0 = \rho(1 - P_n).$$