GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZEROWEJ ORAZ GRY Z NATURĄ

c.-d.

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

- wypisać maksima z każdej kolumny i wybrać najmniejsze z nich:

$$v_B = \min_j \{\max_i \{a_{ij}\}\} \qquad \text{(wartość górna gry)}$$

Jeżeli obie liczby są równe ($v_A=v_B$), to gra posiada rozwiązanie w zbiorze strategii czystych (punkt siodłowy). Gracze powinni stosować te strategie, które odpowiadają wyznaczonemu wierszowi i kolumnie. Jeżeli wybiorą inne strategie, narażą się na niepotrzebne straty.

W przykładzie istnieje punkt siodłowy (rozwiązanie w zbiorze strategii czystych). Gracz A powinien stosować strategię A_1, gracz B – B_3. Wartość gry wyniesie wtedy: $v=v_A=v_B=2$.

a_{ij}	B_1	B_2	B_3	min a_{ij}
A_1	4	6	2	2
A_2	2	8	0	0
A_3	6	-4	-2	-4
max a_{ij}	6	8	2	

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Poszukiwanie strategii zdominowanych.

Strategii zdominowanych (nieefektywnych, nieracjonalnych) poszukujemy, aby uprościć grę (zmniejszyć macierz wypłat). Strategię S_p nazywamy zdominowaną przez strategię S_r, jeżeli:

- dla gracza A: $\forall j : a_{pj} \leq a_{rj}$,
- dla gracza B: $\forall i : a_{ip} \geq a_{ir}$.

Procedurę znajdowania i usuwania strategii zdominowanych przedstawiono dla przykładowej macierzy wypłat.

a_{ij}	B_1	B_2	B_3
A_1	4	6	2
A_2	2	8	0
A_3	6	-4	-2

Strategie gracza A nie są zdominowane (na razie).
B_1 jest zdominowana przez B_3 (usuwamy B_1).

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

a_{ij}	B_2	B_3
A_1	6	2
A_2	8	0
A_3	-4	-2

A_3 jest zdominowana przez np. A_1 (usuwamy A_3).

a_{ij}	B_2	B_3
A_1	6	2
A_2	8	0

B_2 jest zdominowana przez B_3 (usuwamy B_2).

a_{ij}	B_3
A_1	2
A_2	0

A_2 jest zdominowana przez A_1 (usuwamy A_2).

a_{ij}	B_3
A_1	2

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Udało się macierz wypłat zredukować do jednego wiersza i jednej kolumny, czyli gra ma rozwiązanie w zbiorze strategii czystych (A_1, B_3). Wartość gry wynosi 2.

Poszukiwanie rozwiązania w zbiorze strategii mieszanych.

Strategią mieszaną dla danego gracza będziemy nazywać liniową kombinację wypukłą jego strategii czystych.

Stosowane są na ogół w dwóch rodzajach sytuacji:

- w przypadku wielokrotnego (niezależnego od siebie) rozgrywania tej samej gry,
- gdy obszar zastosowania decyzji daje się podzielić na wystarczająco wiele obszarów częściowych.

Optymalnym rozwiązaniem gry będzie strategia mieszana, gdy gra nie ma punktu siodłowego.

Przyjmijmy **NOWĄ** macierz wypłat w analizowanym przykładzie.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

a_{ij}	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	6
A_2	3	1	4
A_3	2	3	3

Gra nie ma rozwiązania w zbiorach strategii czystych (v_A=2, v_B=3). Usuwamy strategie zdominowane (A_3 jest zdominowana przez A_1, B_3 jest zdominowana przez B_1).

a_{ij}	B_1	B_2
A_1	2	4
A_2	3	1

Szukając optymalnych strategii mieszanych można wykorzystać metody i techniki programowania liniowego.

Oznaczenia:

p_i – częstość stosowania przez gracza A strategii A_i, i=1,2,

q_j – częstość stosowania przez gracza B strategii B_j, j=1,2.

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Zadanie znalezienia optymalnej strategii mieszanej dla gracza A (częstości p_i) można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} & v \to \max \\ & 2p_1 + 3p_2 \geq v, \\ & 4p_1 + 1p_2 \geq v, \qquad (1) \\ & p_1 + p_2 = 1, \\ & p_1, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Jeżeli dokonamy podstawienia: $x_i = \frac{p_i}{v}$ (przy zał. v>0), to (1) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} = x_1 + x_2 \to \min \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 1, \qquad (2) \\ & 4x_1 + 1x_2 \geq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Rozwiązanie (2): $x_1=0,2$, $x_2=0,2$, $v=2,5$.
Stąd łatwo wyznaczyć: $p_1=0,5$, $p_2=0,5$.
Czyli gracz A powinien stosować strategie A_1 i A_2 z częstością 0,5 oraz nie stosować strategii A_3 (zdominowana). Minimalna jego wypłata (średnia) wyniesie wtedy 2,5.

Podobnie postępujemy dla gracza B. Zadanie znalezienia optymalnej strategii mieszanej dla gracza B (częstości q_j) można przedstawić następująco:

$$
\begin{aligned}
& v \to \min \\
& 2q_1 + 4q_2 \le v, \\
& 3q_1 + 1q_2 \le v, \qquad\qquad (3) \\
& q_1 + q_2 = 1, \\
& q_1, q_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Jeżeli dokonamy podstawienia: $y_j = \dfrac{q_j}{v}$ (przy zał. $v>0$), to (3) można

zapisać następująco:

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{v} = y_1 + y_2 \rightarrow \max \\
&2y_1 + 4y_2 \le 1, \\
&3y_1 + 1y_2 \le 1, \\
&y_1, y_2 \ge 0.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Rozwiązanie (4): y_1=0,3, y_2=0,1, v=2,5.
Stąd łatwo wyznaczyć: q_1=0,75, q_2=0,25.
Czyli gracz B powinien stosować strategie B_1 z częstością 0,75 i strategię B_2 z częstością 0,25 oraz nie stosować strategii B_3 (zdominowana). Maksymalna jego wypłata (średnia) wyniesie wtedy również 2,5.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

GRY Z NATURĄ

Gry z naturą rozgrywane są przy założeniu pasywnej postawy drugiego z graczy, któremu wynik gry jest obojętny.

Przykład

Inwestor ma podjąć decyzję D_i (i = 1, 2, 3, 4), jaki typ zakładu usługowego ma uruchomić. Dla każdego typu zakładu oszacowano przewidywany zysk a_{ij}, jaki osiągnie się w wyniku eksploatacji zakładu przy różnych stanach S_j (j = 1, 2, 3) przyszłego popytu (pesymistycznym – S_1, przeciętnym – S_2, optymistycznym – S_3). Dane umieszczone są w poniższej tabeli.

a_{ij}	S_1	S_2	S_3
D_1	-20	15	50
D_2	-10	25	40
D_3	-5	10	20
D_4	5	5	25

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

Decydent może kierować się np. 4 poniższymi kryteriami podejmowania decyzji w warunkach niepewności: Walda (maksyminowe), Hurwicza, Bayesa i Savage'a.

1. Kryterium Walda (maksyminowe)

Zgodnie z tym kryterium należy wybrać taki wariant działalności, który przy najmniej korzystnym stanie natury pozwala osiągnąć najlepszy wynik. Jest to reguła asekurancka, reguła gracza ostrożnego, ale inteligentnego.

$$a_{kl} = \max_i \{\min_j \{a_{ij}\}\} \rightarrow D_k$$

a_{ij}	S_1	S_2	S_3	$\min\{a_{ij}\}$
D_1	-20	15	50	-20
D_2	-10	25	40	-10
D_3	-5	10	20	-5
D_4	5	5	25	5

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Walda powinien podjąć decyzję D_4.

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

2. Kryterium Hurwicza

Jest to kryterium kompromisowe między skrajnym pesymizmem a skrajnym optymizmem. Wprowadza się w nim tzw. współczynnik ostrożności $\gamma\,(0 \le \gamma \le 1)$, który określa, w jakim stopniu podejmujący decyzję jest pesymistą.

$$a_k = \max_i\{\gamma \min_j\{a_{ij}\} + (1-\gamma)\max_j\{a_{ij}\}\} \rightarrow D_k$$

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Hurwicza przy współczynniku ostrożności 0,4 powinien podjąć decyzję D_1.

a_{ij}	S_1	S_2	S_3	$\min\{a_{ij}\}$	$\max\{a_{ij}\}$	a_k
D_1	-20	15	50	-20	50	22
D_2	-10	25	40	-10	40	20
D_3	-5	10	20	-5	20	10
D_4	5	5	25	5	25	17

❑ GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

3. Kryterium Bayesa

W tym kryterium przyjmuje się, że wszystkie stany natury są jednakowo prawdopodobne (możemy więc mówić o neutralnym stanowisku w kwestii przyszłych warunków działalności) i wyznacza się wartość średnią wyników dla każdej decyzji. Optymalną jest ta decyzja, dla której średni wynik jest maksymalny.

$$\overline{a}_k = \max_i\{\overline{a}_i\} = \max_i\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\} \rightarrow D_k$$

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Bayesa powinien podjąć decyzję D_2.

a_{ij}	S_1	S_2	S_3	$\overline{a}_i$
D_1	-20	15	50	15
D_2	-10	25	40	18,3
D_3	-5	10	20	8,3
D_4	5	5	25	11,7

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

4. Kryterium Savage'a

W tym kryterium nie ocenia się wyników podjętych decyzji, lecz skutki (straty) wynikające z niepodjęcia decyzji, która przy danym stanie natury byłaby najlepsza. Wyznaczenie decyzji optymalnej odbywa się w dwóch etapach. W pierwszym tworzymy macierz „żalu" (względnych, relatywnych strat), w której znajdują się różnice b_{ij} między maksymalnym do osiągnięcia wynikiem w warunkach S_j a wynikiem uzyskanym w razie podjęcia decyzji D_i.

$$b_{ij} = \max_{i}\{a_{ij}\} - a_{ij}$$

a_{ij}	S_1	S_2	S_3
D_1	-20	15	50
D_2	-10	25	40
D_3	-5	10	20
D_4	5	5	25
max a_{ij}	5	25	50

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO ORAZ GRY Z NATURĄ

W etapie drugim, w tak określonej macierzy względnych strat poszukuje się elementu maksymalnego w każdym wierszu, a następnie wiersza, w którym wartość ta jest najmniejsza.

$$b_{kl} = \min_i\{\max_j\{b_{ij}\}\} \rightarrow D_k$$

b_{ij}	S_1	S_2	S_3	$\max\{b_{ij}\}$
D_1	25	10	0	25
D_2	15	0	10	15
D_3	10	15	30	30
D_4	0	20	25	25

W naszym przykładzie inwestor kierując się kryterium Savage'a powinien podjąć decyzję D_2.

ANALIZA SIECIOWA PRZEDSIĘWZIĘĆ METODA ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ ALGORYTM – CPM

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Współczesne metody zarządzania wymagają posługiwania się nowoczesnymi narzędziami pracy. Jednym z głównych problemów w procesie zarządzania jest ocena działalności gospodarczej planowania oraz kontroli wykonania przedsięwzięcia (głównie z punktu widzenia optymalnych efektów ekonomicznych).

Do metod tych, które łączą się nierozerwalnie z prowadzeniem działalności gospodarczej i odgrywają coraz większą rolę w zarządzaniu produkcją, należą metody planowania sieciowego takie jak: **planowanie sieciowe, analiza oraz synteza uogólnionych sieci decyzyjnych itp.**

Deterministyczne metody sieciowe są powszechnie stosowane w organizacji, planowaniu i kierowaniu różnego rodzaju przedsięwzięciami (uruchamianie nowej produkcji, kierowanie inwestycjami, remonty maszyn i urządzeń).

Aby zrozumieć współczesne metody ilościowe wspomagające procesy decyzyjne w planowaniu i organizacji przedsięwzięć konieczna jest znajomość podstawowych zasad budowy tzw. **sieciowego modelu struktury przedsięwzięcia**.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Aby zrozumieć współczesne metody ilościowe wspomagające procesy decyzyjne w planowaniu i organizacji przedsięwzięć konieczna jest znajomość podstawowych zasad budowy tzw. **sieciowego modelu struktury przedsięwzięcia**.

Jest to szczególnie istotne dla wieloczynnościowych przedsięwzięć posiadających nietypową strukturę i przebieg, czyli dla tzw. procesów nieregularnych. Procesami takimi są między innymi:

- Procesy technicznego przygotowania produkcji,
- Przedsięwzięcia badawczo rozwojowe,
- Modernizacja zakładów przemysłowych,
- Duże przedsięwzięcia inwestycyjne,
- Niektóre przedsięwzięcia organizacyjne,
- Wyprodukowanie złożonego wyrobu na zamówienie (produkcja jednostkowa) itp.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Sieciowy model przedsięwzięcia:

Proces realizacji przedsięwzięcia możemy modelować za pomocą tzw. **sieci czynności**

Sieć czynności - jest to graf spójny acykliczny, który posiada jeden wierzchołek początkowy i jeden wierzchołek końcowy. Łuki tego grafu (sieci) przedstawiają czynności, wierzchołki zaś zdarzenia.

Sieć ta przedstawia strukturę kolejności realizacji poszczególnych czynności danego przedsięwzięcia. Funkcje określone na zbiorze łuków lub wierzchołków grafu reprezentują informacje o charakterze techniczno – ekonomicznym związane z realizacją tego procesu (przedsięwzięcia) - np. **czas trwania czynności**.

Każde przedsięwzięcie bez względu na jego charakter, rodzaj czy złożoność, ma wspólne elementy, którymi są:

- **czynność** – część przedsięwzięcia, której realizacja jest związana z upływem czasu oraz ze zużywaniem zasobów (działalność biurowa, wykonanie fundamentów, praca ludzka itp.)
  Oznaczmy przez **U** – zbiór czynności danego przedsięwzięcia. Są one przedstawiane jako łuki w grafie sieci przedsięwzięcia, ze strzałką skierowaną zgodnie z postępem prac w czasie.
- **zdarzenie** – jest to czas (moment), w którym kończy się lub rozpoczyna co najmniej jedna czynność. Stanowi ono początek lub koniec pewnego etapu realizacji danego przedsięwzięcia. (zakończenie budowy fundamentu, rozpoczęcie procesu reklamy produktu). Ze zdarzeniem zawsze związany jest pewien termin.
  Oznaczmy przez **V** – zbiór wszystkich stanów (zdarzeń) w realizacji przedsięwzięcia. Są one przedstawiane na rysunku jako węzły (wierzchołki) grafu przedsięwzięcia za pomocą koła lub innej prostej figury geometrycznej.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- **zależność czasowa** – rodzaj czynności służącej do pokazania zależności między zdarzeniami. Umożliwia ona między innymi jednoczesny zapis czynności wykonywanych równolegle (jest to wtedy tzw. czynność fikcyjna), może również określać wzajemne wyprzedzenie lub opóźnienie pewnych zdarzeń. Zależność czasowa jest przedstawiana w sieciowym modelu za pomocą strzałki przerywanej.

Graficzne symbole trzech elementów (**czynności, zdarzenia, zależności czasowej**) wyróżnionych w dowolnym przedsięwzięciu umożliwiają sporządzenie graficznego obrazu wszystkich technologicznych i organizacyjnych powiązań wewnątrz realizowanego przedsięwzięcia. Obraz ten, precyzując jednocześnie kolejność czynności, tworzy **sieć czynności** – jest to pierwszy i bardzo ważny etap analizy sieci czynności.

Na zbiorze **U** - łuków oraz na zbiorze **V** – węzłów grafu $G = \langle V, U \rangle$ charakteryzującego przedsięwzięcie określone są funkcje: $f_1, f_2, \dots, f_m$ (deterministyczne lub losowe). Funkcje te to zazwyczaj charakterystyki techniczno – ekonomiczne badanego przedsięwzięcia (np. czas trwania czynności, koszty wykonania czynności, zapotrzebowanie na określone środki itp.)

Graf $G = \langle V, U, f_1, \dots, f_m \rangle$ w którym uwzględniono charakterystyki techniczno – ekonomiczne przedsięwzięcia nazywa się **skierowanym grafem obciążonym przedsięwzięcia** lub **modelem sieciowym** (lub krótko **siecią**).

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Konstrukcja sieci czynności:

Do wykreślenia sieci czynności dla dowolnego projektu niezbędne są informacje dotyczące czynności wchodzących w skład przedsięwzięcia oraz ustalenie kolejności ich występowania.

W trakcie wykreślania sieci czynności można wyróżnić 4 etapy jej konstruowania:

- ustalenie listy czynności;
- ustalenie zdarzenia początkowego i końcowego przedsięwzięcia;
- określenie kolejności wykonywania czynności;
- numerowanie wierzchołków;

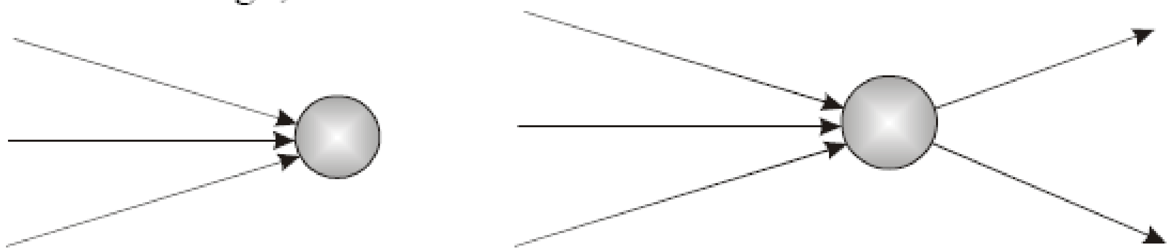
Ponadto powinny być przestrzegane następujące zasady:

- zdarzenie początkowe nie ma żadnych czynności poprzedzających;
- zdarzenie końcowe nie ma żadnych czynności następujących;
- dwa kolejne zdarzenia mogą być połączone tylko jedną czynnością;
- początkiem każdej czynności jest zawsze pewne **i – te** zdarzenie, zwane zdarzeniem poprzedzającym;
- końcem każdej czynności jest zawsze pewne **j – te** zdarzenie, zwane zdarzeniem następującym;

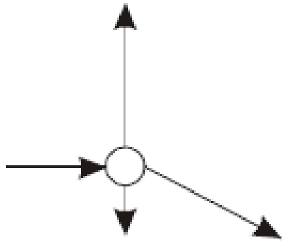
- wszystkie zdarzenia w sieci (z wyjątkiem początkowego i końcowego) powinny być początkiem i końcem co najmniej jednej czynności;

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- zdarzeniem zrealizowanym nazywamy każde zdarzenie w chwili, gdy czynność lub czynności, dla których jest ono zdarzeniem następującym, zostały wykonane;
- czynność lub czynności mogą się rozpoczynać tylko od zdarzenia zrealizowanego;



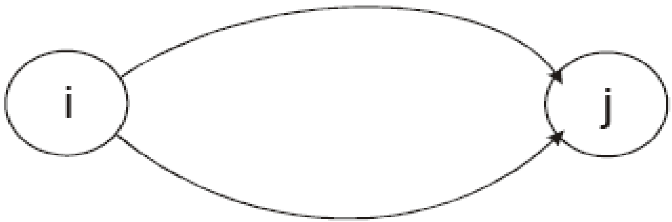
- długość i kierunek strzałki przedstawiającej czynność lub zależność czasowa nie odwzorowują ich czasu trwania, lecz są dyktowane wyłącznie wygodą graficznego przedstawienia sieci czynności



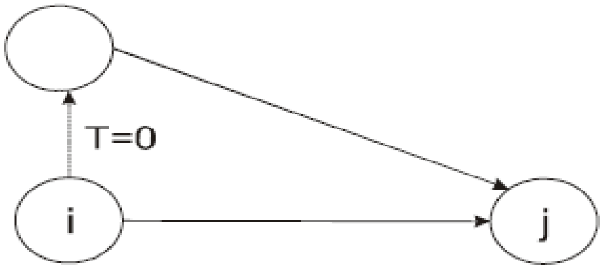
❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- dwa zdarzenia nie mogą być bezpośrednio połączone przez dwie lub więcej czynności. Jeżeli kilka czynności ma być wykonane równocześnie, to rozdziela się początki lub końce czynności formalnie na co najmniej dwa zdarzenia, wykorzystując zależność czasową o czasie trwania T=0 (tworząc tzw. czynności fikcyjne)

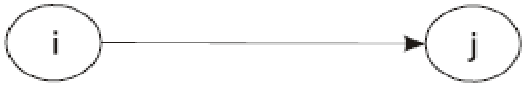
nie tak



lecz tak



- dla identyfikacji zdarzeń, czynności i zależności czasowych, każde zdarzenie oznaczone jest numerem. Numeracja jest w zasadzie dowolna, dwa różne zdarzenia nie mogą być jednak oznaczone tym samym numerem;
- każda czynność oraz zależność czasowa jest identyfikowana za pomocą dwóch numerów: numeru zdarzenia poprzedzającego – **i** oraz numeru zdarzenia następującego – **j**. Przy oznaczeniu tak zdarzeń, czynność oznaczamy przez (i, j);



❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Opisane zasady i etapy postępowania zilustrujemy na przykładzie budowy sieci czynności przedstawiającej – wprowadzanie nowego produktu na rynek. Przedsięwzięcie takie składa się z czynności dotyczących sfery projektowania produkcji, jak również działań związanych z badaniem rynku.

Etap 1 – ustalenie listy czynności tego przedsięwzięcia.

Nazwa czynności:
A – badanie popytu na rynku **B** – nabycie surowców na prototypy **C** – wyprodukowanie prototypów i ocena ich jakości **D** – nabycie surowców do produkcji **E** – wybór opakowań **F** – analiza kosztów produkcji **G** – proces produkcji wyrobu **H** – wysyłka do sklepów **I** – reklama i zbieranie zamówień **J** – nabycie opakowań **K** – pakowanie wyrobu gotowego **L** – analiza ekonomicznych parametrów decyzji po podjęciu procesu produkcji

Etap 2 – ustalenie zdarzenia początkowego i końcowego przedsięwzięcia.
Zdarzeniem początkowym jest – **podjęcie decyzji o produkcji na rynek nowego wyrobu**.
Zdarzeniem końcowym jest – **wyrób jest oferowany w sklepie do sprzedaży**.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Etap 3 – określenie kolejności wykonywania czynności. Na tym etapie należy dla każdej czynności określić: czynności poprzedzające, następujące oraz ewentualne czynności równoległe – które mogą być wykonywane jednocześnie z czynnością rozpatrywaną.

Powiązania między czynnościami w naszym przykładzie są następujące:

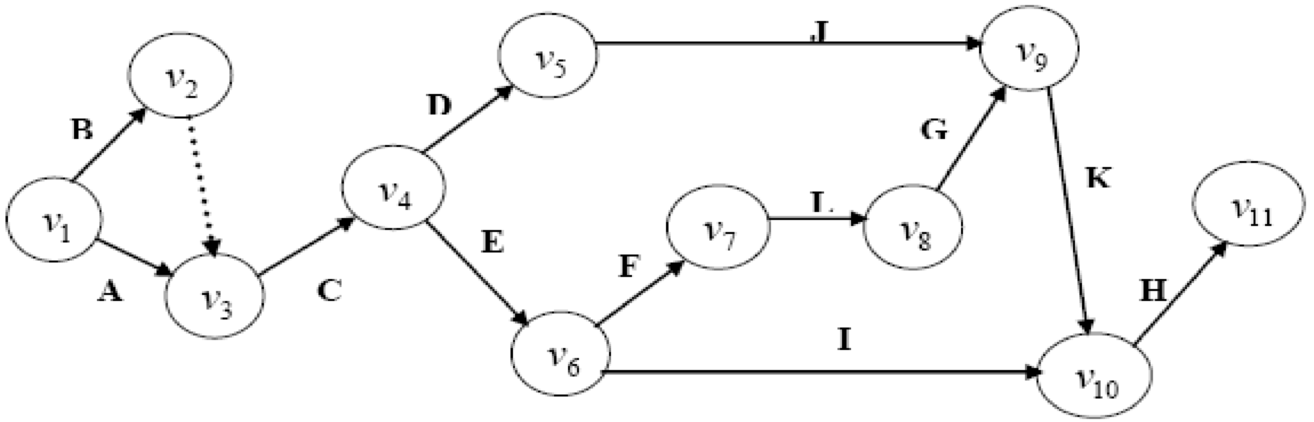
Czynności	Czynności bezpośrednio:		
	poprzedzające	następujące	równoległe
A	-	C	B
B	-	C	A
C	A, B	D, E	
D	C	J	
E	C	F, I	
F	E	L	
G	L	K	
H	I, K	-	
I	E	H	
J	D	K	
K	J, G	H	
L	F	G	

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Etap 4 – numerowanie wierzchołków. Przy numerowaniu sieci (zdarzeń) należy uwzględnić, że następują one w określonej kolejności oraz to, że zdarzenie będące początkiem czynności powinno mieć numer mniejszy niż zdarzenie, które jest jej końcem.

Uwaga: Uporządkowanie wierzchołków zgodnie z ta zasadą można uzyskać stosując algorytm uporządkowania dolnego (warstwowego) dla grafu tworzonej sieci czynności. Wtedy konieczne jest niejednokrotnie przenumerowanie wierzchołków takiego grafu (nadając kolejne liczby naturalne kolejnym wierzchołkom z kolejnych warstw – począwszy od **1** dla wierzchołka wejścia a skończywszy na **n** dla wierzchołka wyjścia).

Na rysunku przedstawiono graf skierowany analizowanego przykładowego przedsięwzięcia związanego z wprowadzaniem nowego produktu na rynek.



❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Analiza sieci z funkcją czasu. Metoda ścieżki krytycznej – CPM:

Metoda CPM *(Critical Path Metod)* jest historycznie najwcześniej opracowaną metodą analizy sieciowej. Umożliwia ona takie zaplanowanie harmonogramu realizacji przedsięwzięcia, przy której jego czas realizacji jest najkrótszy.

Metoda ta wymaga, aby sieć czynności była określona w postaci kanonicznej (deterministyczna jej struktura) oraz aby czasy realizacji wszystkich czynności były zdeterminowane (znane). W sieci takiej czynności są realizowane niezależnie od uwarunkowań losowych.

Kanoniczna **sieć przedsięwzięcia**: $G\langle V, U, t\rangle$ posiada funkcję $t : U \to R^{+}$, która każdemu łukowi $u = \langle v_{\alpha}, v_{\beta}\rangle \in U$ przypisuje nieujemną liczbę $t_{\alpha\beta} \in R^{+}$ opisującą czas trwania czynności związanej z łukiem **u**, która zaczyna się zdarzeniem v_{α} a kończy zdarzeniem v_{β}.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Z punktu widzenia menadżera istotne są informacje o **czasie realizacji całego przedsięwzięcia** oraz o **czasach realizacji krytycznych czynności** w tym przedsięwzięciu.

Czynność jest **krytyczna** jeśli czas jej realizacji (pełnego wykonania) decyduje o czasie zakończenia przedsięwzięcia w **zaplanowanym terminie**.

Wszystkie potrzebne informacje (o czasie realizacji przedsięwzięcia, czynnościach krytycznych, zapasach czasu dla poszczególnych czynności) mogą być uzyskane metodą **CPM**.

Metoda ścieżki krytycznej oparta jest na następujących założeniach determinujących jednocześnie odpowiedni sposób postępowania przy określaniu krytycznych czynności przedsięwzięcia:

1. Rozpoczęcie realizacji jakiejkolwiek czynności możliwe jest jedynie wtedy, gdy wszystkie czynności ją poprzedzające zostały zrealizowane.

2. Moment w którym rozpoczyna się realizacja całego przedsięwzięcia uznajemy za zerowy, tzn. $t_1 = 0$ (termin rozpoczęcia zdarzenia odpowiadającego wierzchołkowi początkowemu v_1 w sieci czynności).

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

3. Z uwagi na założenie nr 1 **najwcześniejszy możliwy termin** wystąpienia zdarzenia związanego z węzłem $v_\beta \in V, \beta > 1$ obliczamy rekurencyjnie następująco:

$$t_\beta = \max_{\alpha \in \Gamma_\beta^-} \{ t_\alpha + t_{\alpha\beta} \} \text{ dla } \beta = 2,3,\dots,n \text{ (n – liczebność zbioru } \mathbf{V}\text{)}$$

Czas ten oznacza również najwcześniejszy z możliwych momentów czasowych, w których może być wykonana czynność rozpoczynająca się zdarzeniem v_β.

Czas t_β jest ponadto maksymalnym czasem realizacji wszystkich czynności na każdej ścieżce $\left| v_1, v_\beta \right|$ w sieci modelowanej grafem **G**.

Czas realizacji wszystkich czynności ścieżki $\left| v_1, v_\beta \right|$ jest rozumiany jako:

$t_{[1,\beta]} = \sum_{\langle v_i, v_j \rangle \in U_{[1,\beta]}} t_{ij}$, gdzie $U_{[1,\beta]}$ jest zbiorem łuków ze zbioru **U**, które tworzą drogę zgodnie skierowaną (czyli ścieżkę) w grafie **G** zaczynającą się węzłem v_1 a kończącą węzłem v_β.

PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Jeśli v_n oznacza wierzchołek końcowy (wyjściowy) sieci, to t_n jest czasem wykonania (terminem realizacji całego przedsięwzięcia). Jest to **najkrótszy z możliwych czasów zakończenia całego przedsięwzięcia**, jeśli tylko uwzględnimy spełnienie założenia 1.

Drogi skierowane (ścieżki) $[1,n]$ w sieci **G** dla których spełniony jest warunek: $t_{[1,n]} = t_n$ nazywamy **drogami (ścieżkami) krytycznymi**.
Czynności odpowiadające łukom leżącym na drodze krytycznej są zatem czynnościami krytycznymi.

4. Oznaczamy przez T_α - **najpóźniejszy dopuszczalny** termin wystąpienia zdarzenia $v_\alpha \in V$. Czas ten określa również najpóźniejszy z możliwych termin rozpoczęcia realizacji czynności (zaczynającej się zdarzeniem v_α), tak aby nie przekroczyć sumarycznego czasu t_n zrealizowania całego przedsięwzięcia (z jednoczesnym zachowaniem założenia 1).

W metodzie CPM najpóźniejsze dopuszczalne czasy wystąpienia dla poszczególnych zdarzeń wyznaczamy rekurencyjnie następująco:
Przyjmujemy, że dla węzła wyjściowego sieci **G** zachodzi: $T_n = t_n$, natomiast dla pozostałych zdarzeń $v_\alpha \in V - \{v_n\}$ czasy te wyznaczamy następująco:

$$T_\alpha = \min_{\beta \in \Gamma_\alpha^+} \{T_\beta - t_{\alpha\beta}\} \text{ dla } \alpha = n-1, n-2, \ldots, 1 .$$

Oczywiste jest, że dla każdego zdarzenia $v_\alpha \in V$ spełnione jest $t_\alpha \le T_\alpha$, zaś zdarzenia w których $t_\alpha = T_\alpha$ nazywamy zdarzeniami krytycznymi.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Rezerwy czasowe w sieciowym modelu realizacji przedsięwzięcia:

Znajomość czasów w odniesieniu do poszczególnych czynności: $u = \langle v_\alpha , v_\beta \rangle \in U$ przedsięwzięcia modelowanego siecią czynności z grafem **G** umożliwia określenie odpowiednich rezerw czasowych dla kolejnych czynności.

Dla danej czynności: $u = \langle v_\alpha , v_\beta \rangle \in U$ **oznaczmy przez:**

$t_{\alpha\beta,\, rozp} = t_\alpha$ - czas najwcześniejszego rozpoczęcia czynności,

$t_{\alpha\beta,\, zak} = t_\alpha + t_{\alpha\beta}$ - czas najwcześniejszego zakończenia czynności,

$T_{\alpha\beta,\, rozp} = T_\beta - t_{\alpha\beta}$ - czas najpóźniejszego rozpoczęcia czynności,

$T_{\alpha\beta,\, zak} = T_\beta$ - czas najpóźniejszego zakończenia czynności,

Ponadto dla kolejnych wierzchołków (zdarzeń) $v_\alpha \in V$ grafu **G** oraz kolejnych jego łuków (czynności) $u = \langle v_\alpha , v_\beta \rangle \in U$ określamy następujące rezerwy czasowe:

- $z(\alpha) = T_\alpha - t_\alpha$ - **luz czasowy** dla zdarzenia v_α;

Luz czasowy – charakteryzuje rezerwę czasową w zdarzeniu $v_\alpha \in V$ i jest długością przedziału czasu $[t_\alpha , T_\alpha]$, w którym może nastąpić realizacja tego zdarzenia bez zmiany (wydłużenia) czasu realizacji całego przedsięwzięcia.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- $z_c(\alpha,\beta) = T_{\alpha\beta,rozp} - t_\alpha = T_\beta - t_\alpha - t_{\alpha\beta}$ - **zapas całkowity** czynności **u**;

Zapas całkowity $z_c(\alpha,\beta)$ - jest czasem o jaki można **opóźnić rozpoczęcie** realizacji czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ (lub **wydłużyć jej realizację**) bez wpływu na **czas wykonania całego przedsięwzięcia**, przy założeniu, że czasy realizacji pozostałych czynności przedsięwzięcia nie ulegają zmianie.

Jeżeli $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ jest czynnością krytyczną (leży na ścieżce krytycznej), to $z_c(\alpha,\beta) = 0$ (**twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe**).

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

- $z_s(\alpha,\beta) = t_\beta - t_{\alpha\beta,zak} = t_\beta - t_\alpha - t_{\alpha\beta}$ - **zapas swobodny** dla czynności **u**;

Swobodny (wolny) zapas czasowy $z_s(\alpha,\beta)$ – informuje o ile można **opóźnić** (lub **wydłużyć**) czas realizacji czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ **nie zmieniając terminu zajścia** (realizacji) zdarzenia **poprzedzającego** - v_α i **następującego** - v_β po danej czynności.

Wykorzystanie tego zapasu **nie ma wpływu** na zapasy związane z czynnościami należącymi do danej ścieżki.

Uwaga: mogą istnieć czynności dla których $z_s(\alpha,\beta) = 0$ i które nie leżą na drodze krytycznej.

- $z_w(\alpha,\beta) = z_c(\alpha,\beta) - z_s(\alpha,\beta) = T_\beta - t_\beta$ - **zapas warunkowy** dla czynności **u**;

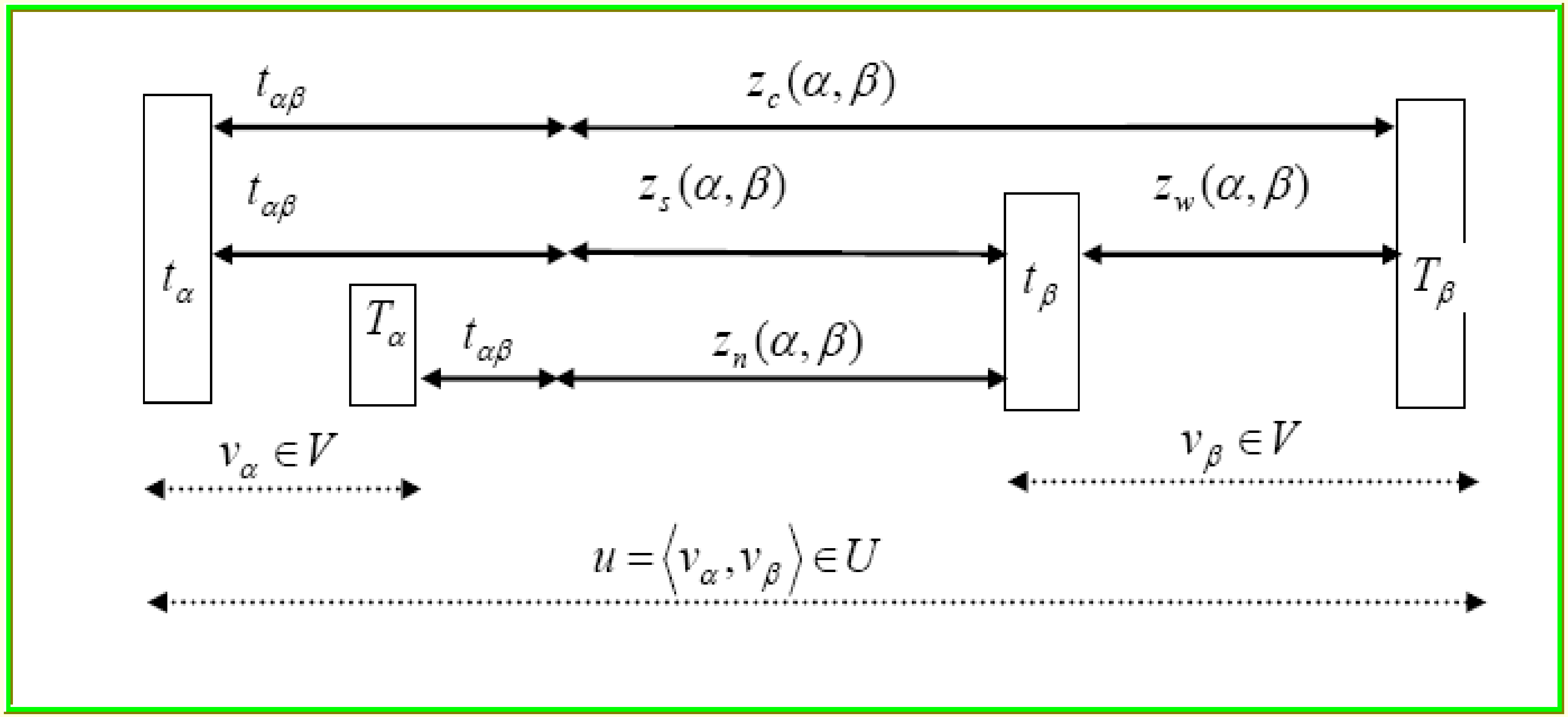
Jest zatem **luzem czasowym** dla zdarzenia kończącego czynność. Ta rezerwa czasu może być wykorzystana dla czynności **bez zmniejszenia zapasów poprzednich** określonych dla czynności **danej ścieżki**.

- $z_n(\alpha,\beta) = \max\{0; t_\beta - T_\alpha - t_{\alpha\beta}\}$ - **zapas niezależny** dla danej czynności **u**;

Zapas niezależny $z_n(\alpha,\beta)$ - jest czasem o jaki można opóźnić wykonanie czynności $u = \langle v_\alpha, v_\beta \rangle \in U$ w stosunku do najpóźniejszego terminu T_α i bez naruszenia terminu t_β.

Wykorzystanie tej rezerwy czasu **nie ma wpływu na zapas** jakiejkolwiek innej czynności przedsięwzięcia.

❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM



❑ PROGRAMOWANIE SIECIOWE – analiza sieciowa przedsięwzięć - metoda CPM

Rezerwy czasowe dla czynności:

Czynność $\langle v_\alpha, v_\beta \rangle$	Czas trwania czynności $t_{\alpha\beta}$	Czas $t_{\alpha\beta,rozp}$	Czas $t_{\alpha\beta,zak}$	Czas $T_{\alpha\beta,rozp}$	Czas $T_{\alpha\beta,zak}$	Rezerwa czasowa $z_c(\alpha,\beta)$	Rezerwa czasowa $z_s(\alpha,\beta)$	Rezerwa czasowa $z_n(\alpha,\beta)$
$\langle 1,2 \rangle$	8	0	8	0	8	0 (*)	0 (*)	0 (*)
$\langle 1,3 \rangle$	4	0	4	13	17	13	0	0
$\langle 1,4 \rangle$	2	0	2	10	12	10	10	10
$\langle 2,4 \rangle$	4	8	12	8	12	0 (*)	0 (*)	0 (*)
$\langle 2,5 \rangle$	4	8	12	15	19	7	0	0
$\langle 3,6 \rangle$	0	4	4	17	17	13	13	0
$\langle 4,6 \rangle$	5	12	17	12	17	0 (*)	0	0 (*)
$\langle 5,7 \rangle$	3	12	15	19	22	7	7	0
$\langle 6,7 \rangle$	5	17	22	17	22	0 (*)	0	0 (*)