Optymalizacja nieliniowa - rozwiązane przykłady

Literatura: Karol Kukuła (red.), Badania operacyjne w przykładach i zadaniach, rozdział 6, str. 213-230,
Materiały „PDF" z wykładów.

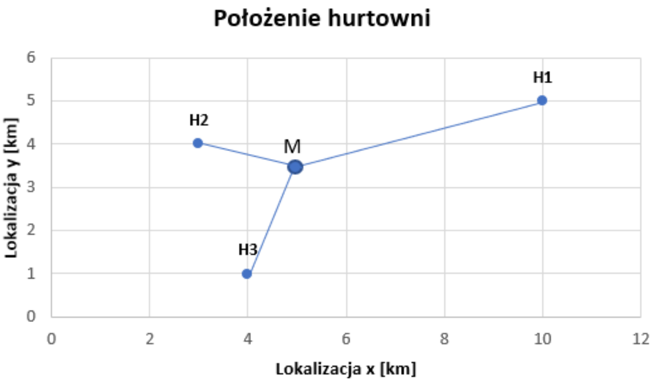
Przykład 1.

Określić optymalne współrzędne (X,Y) dla lokalizacji centralnego magazynu zaopatrującego w towar trzy hurtownie na podstawie danych podanych w tabeli.

Lokalizacje hurtowni $(x_i, y_i); i = 1,2,3$:

Numer hurtowni	Lokalizacja x_i [km]	Lokalizacja y_i [km]	Wielkość zapotrzebowania z_i [w jednostkach towaru]
1	10	5	10
2	3	4	20
3	4	1	10

Zakładamy, że koszty dostaw z magazynu do każdej hurtowni są proporcjonalne do wielkości zapotrzebowania oraz do kwadratu ich odległości: $K_i(X,Y) = z_i * d_i^2 = z_i * [(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2] \geq 0$. Jako kryterium decyzyjne przyjąć łączne koszty dostaw z magazynu do wszystkich hurtowni. Ile wynoszą te koszty ?



Ilustracja graficzna zadania:

Model matematyczny:

Zmienne decyzyjne:

$X \geq 0$ – współrzędna lokalizacji na osi poziomej [km] magazynu

$Y \geq 0$ – współrzędna lokalizacji na osi pionowej [km] magazynu

Funkcja celu:

$$K(X,Y) = \sum_{i=1}^{3} K_i\,(X,Y) = 10 * [(X - 10)^2 + (Y - 5)^2] + 20 * [(X - 3)^2 + (Y - 4)^2] +$$

$$10 * [(X - 4)^2 + (Y - 1)^2] \rightarrow min$$

Brak jest w zadaniu warunków ograniczających – zadanie optymalizacji nieliniowej bezwarunkowej (bez dodatkowych warunków nałożonych na zmienne decyzyjne)

Rozwiązanie:

Warunki konieczne istnienia ekstremum funkcji kosztów – zerowanie się pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial X} = K_x' = 10 * 2 * (X - 10) + 20 * 2 * (X - 3) + 10 * 2 * (X - 4) = 0 \\ \frac{\partial K}{\partial Y} = K_y' = 10 * 2 * (Y - 5) + 20 * 2 * (Y - 4) + 10 * 2 * (Y - 1) = 0 \end{cases}$$

Przekształcając te warunki:

$$\begin{cases} 20 * (X - 10) + 40 * (X - 3) + 20 * (X - 4) = 0 \quad |: 20 \\ 20 * (Y - 5) + 40 * (Y - 4) + 20 * (Y - 1) = 0 \quad |: 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (X - 10) + 2 * (X - 3) + (X - 4) = 0 \\ (Y - 5) + 2 * (Y - 4) + (Y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 * X = 20 \\ 4 * Y = 14 \end{cases}$$

Zatem punkt w którym może istnieć minimum funkcji celu ma współrzędne: $\begin{cases} X^* = 5 \\ Y^* = 3{,}5 \end{cases}$

Warunki dostateczne istnienia minimum w punkcie zerowania się pochodnych cząstkowych:

Tworzymy macierz Hesjan pochodnych cząstkowych 2-go rzędu postaci: $H = \begin{bmatrix} \frac{\partial_K^2}{\partial x^2} & \frac{\partial_K^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial_K^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial_K^2}{\partial y^2} \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial_K^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} K_x' = 20 * 1 + 40 * 1 + 20 * 1 = 80$$

$$\frac{\partial_K^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} K_y' = 20 * 1 + 40 * 1 + 20 * 1 = 80$$

$$\frac{\partial_K^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial_K^2}{\partial y \partial x} = 0$$

Zatem Hesjan przyjmie postać: $H = \begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix}$. Warunkiem wystarczającym istnienia minimum funkcji celu jest aby wartość wyznacznika dla Hesjanu była dodatnia (det(H)>0 oraz element $h_{11} = 80 > 0$) – gdyby było zadanie na maksimum, wyznacznik ma być ujemny (det(H)<0 oraz $h_{11} = 80 > 0$).

Ponieważ $\det(H) = 80 * 80 - 0 * 0 = 6400 > 0$, zatem w punkcie (5;3,5) mamy rzeczywiście minimum funkcji kosztów.

Należy zatem zlokalizować współrzędne magazynu w układzie współrzędnych na osi poziomej w odległości: $X^* = 5\ [km]$, zaś na osi pionowej w odległości $Y^* = 3{,}5\ [km]$. Wtedy minimalne koszty dostaw do wszystkich trzech hurtowni wyniosą:

$$K^* = 10 * [(5 - 10)^2 + (3{,}5 - 5)^2] + 20 * [(5 - 3)^2 + (3{,}5 - 4)^2] + 10 * [(5 - 4)^2 + (3{,}5 - 1)^2] = 430.$$

Przykład 2.

Przedsiębiorstwo przemysłowe korzysta z dwóch bocznic do wyładunku towarów. Koszty postojowego (w tyś zł) związane z postojem wagonów na bocznicach podczas rozładunku wyraża następująca funkcja:

$$K(t_1, t_2) = 0{,}5 * t_1^2 + t_1 + 0{,}25 * t_2^2 + t_2$$

gdzie:

$t_1 > 0$ - czas trwania wyładunku na bocznicy 1 (w dniach)

$t_2 > 0$ - czas trwania wyładunku na bocznicy 2 (w dniach)

Pociągi towarowe wożące surowce do przedsiębiorstwa mają w swym składzie 24 wagonów.

Dzienne zdolności przeładunkowe obu bocznic wynoszą: 4 i 3 wagony.

Jak należy rozdzielić wagony między obie bocznice, aby koszt związany z postojem był możliwie najniższy ?

Ile dni wobec tego będzie trwał wyładunek na obu bocznicach ?

Podać koszt postojowego przy optymalnym rozłożeniu wagonów między obie bocznice

<u>Rozwiązanie:</u>

Model matematyczny problemu decyzyjnego:

$$K(t_1, t_2) = 0{,}5 * t_1^2 + t_1 + 0{,}25 * t_2^2 + t_2 \rightarrow min$$

Przy warunkach:

$$4 * t_1 + 3 * t_2 = 24$$
$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$$

Zastosujemy metodę podstawiania i eliminacji zmiennych.
Pozbywamy się warunku ograniczającego. Z warunku ograniczającego wyznaczymy jedna ze zmiennych np. $t_1 = 6 - \frac{3}{4} * t_2$ (*) i wstawimy do funkcji celu.
Dzięki temu funkcja celu będzie tylko zależeć od jednej zmiennej:

$$\begin{aligned} K(t_2) &= \frac{1}{2} * \left(6 - \frac{3}{4} * t_2\right)^2 + \left(6 - \frac{3}{4} * t_2\right) + \frac{1}{4} * t_2^2 + t_2 \\ &= \frac{1}{2} * \left(36 - 9 * t_2 + \frac{9}{16} * t_2^2\right) + \left(6 - \frac{3}{4} * t_2\right) + \frac{1}{4} * t_2^2 + t_2 \\ &= 18 - \frac{9}{2} * t_2 + \frac{9}{32} * t_2^2 + 6 - \frac{3}{4} * t_2 + \frac{1}{4} * t_2^2 + t_2 = \frac{17}{32} * t_2^2 - \frac{17}{4} * t_2 + 24 \end{aligned}$$

$$K(t_2) = \frac{17}{32} * t_2^2 - \frac{17}{4} * t_2 + 24 \rightarrow min$$

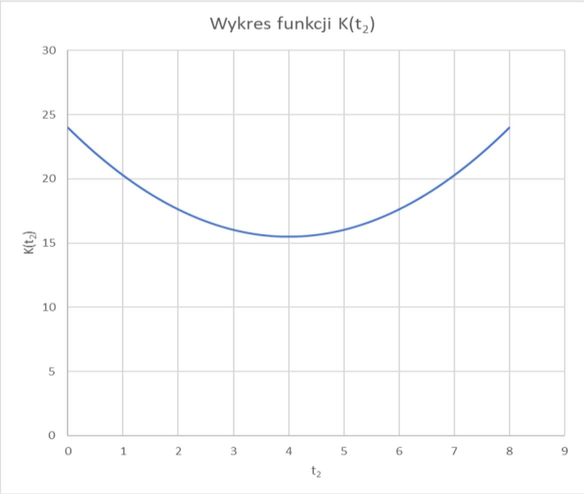
Jest to funkcja kwadratowa postaci: $a * t^2 + b * t + c$, dla której współczynnik (a=$\frac{17}{32} > 0$) zatem minimum posiada dla współrzędnych wierzchołka.

Współczynnik delta $\Delta = b^2 - 4 * a * c = \frac{17^2}{4} - 4 * \frac{17}{32} * 24 = -\frac{527}{16} < 0$.

Współrzędne wierzchołka wynoszą:

$$t_2^* = \frac{-b}{2*a} = \frac{\frac{17}{4}}{2*\frac{17}{32}} = \frac{17}{4}*\frac{16}{17} = 4$$

$$K(t_2^*) = \frac{-\Delta}{4*a} = \frac{\frac{527}{16}}{4*\frac{17}{32}} = \frac{527}{16}*\frac{8}{17} = \frac{31}{2} = 15\frac{1}{2}$$



Rys. Wykres funkcji K(t_2)

Z warunku (*) wyznaczamy wartość pierwszej zmiennej decyzyjnej: $t_1 = 6 - \frac{3}{4} * t_2 = 6 - \frac{3}{4} * 4 = 3$.

<u>Inny sposób - wykorzystanie rachunku pochodnych:</u>

Funkcja: $K(t_2) = \frac{17}{32} * t_2^2 - \frac{17}{4} * t_2 + 24 \to min$

osiąga minimum, gdy zachodzi warunek konieczny zerowania się pierwszej pochodnej:

$$K'(t) = \frac{dK}{dt_2} = \frac{17}{32} * 2 * t_2 - \frac{17}{4} = 0$$

Zatem
$\frac{17}{16} * t_2 = \frac{17}{4}$, więc $t_2^* = 4$

Warunek dostateczny: druga pochodna w punkcie $t_2^* = 4$ powinna być dla zadania na minimum (dodatnia)
Sprawdźmy, że $K''(t) = \left(\frac{17}{16} * t_2 - \frac{17}{4}\right)' = \frac{17}{16} > 0$ dla dowolnego t_2, tym samym dla $t_2^* = 4$.

<u>Odpowiedź:</u>
Czas rozładowania na bocznicy 1 będzie wynosił $t_1^* = 3$ [dni] zaś na bocznicy 2 będzie wynosił $t_2^* = 4$ [dni].
Koszt łączny postojowego wynosi: $K^*(t_1, t_2) = K^*(3,4) = 15,5$ [tys. zł]
Na bocznicy 1 zostanie rozładowanych $3 * 4 = 12$ [wagonów], zaś na bocznicy 2 także $3 * 4 = 12$ [wagonów].

Przykład 3.

Firma UPS zamierza rozszerzyć swoja działalność w 3 nowych krajach. Firma zamierza zatrudnić w nowych tworzonych oddziałach łącznie 11 [tys.] pracowników. Oszacowano funkcję kosztów zatrudnienia nowych pracowników postaci: $K(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - x_1 + 12$ [tys. zł], gdzie: x_i $(i = 1,2,3)$ – planowane zatrudnienie w oddziałach i-tego kraju.
Określić optymalne dla firmy wielkości zatrudnienia w poszczególnych oddziałach. Rozwiązać zadanie metodą Lagrange'a. Podać optymalne koszty zatrudnienia.

<u>Model matematyczny:</u>

Zmienne decyzyjne:

$x_1 \geq 0$ – liczba nowych pracowników zatrudnionych w oddziałach (i=1) pierwszego kraju

$x_2 \geq 0$ – liczba nowych pracowników zatrudnionych w oddziałach (i=2) drugiego kraju

$x_3 \geq 0$ – liczba nowych pracowników zatrudnionych w oddziałach (i=3) trzeciego kraju

Funkcja celu: $K(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - x_1 + 12 \rightarrow min$

Warunki ograniczające:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 = 11\ [tys.]\ osób & (1) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

<u>Rozwiązanie:</u>

Zamieniamy zadanie ekstremum warunkowego (z warunkami w postaci kanonicznej - równania) na zadanie optymalizacji bezwarunkowej.

Tworzymy tzw. funkcję Lagrange'a postaci (**zob. materiały wykład „PDF"**):

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - x_1 + 12 + \lambda * (11 - (x_1 + x_2 + x_3)) \rightarrow min$$

Warunki konieczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a – zerowanie się jej pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu.

(*)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2 * x_1 - 1 - \lambda = 0\ (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2 * x_2 - \lambda = 0\ (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 6 * x_3 - \lambda = 0\ (3) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 11 - x_1 - x_2 - x_3 = 0\ (4) \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ 4-równań z 4-niewiadomymi otrzymujemy:

Z równania (1) otrzymujemy zależność dla czynnika nieoznaczonego: $\lambda = 2 * x_1 - 1$. Wstawiając tę zależność do równania (2) i (3) otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2 * x_2 - 2 * x_1 + 1 = 0 \\ 6 * x_3 - 2 * x_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Zatem $2 * x_1 = 2 * x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2 + \frac{1}{2}$.

Oraz $6 * x_3 - 2 * x_2 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3} x_2$

Wstawiając te zależności do (4) równania otrzymujemy: $11 - x_2 - \frac{1}{2} - x_2 - \frac{1}{3} x_2 = 0 \Rightarrow \frac{7}{3} x_2 = \frac{21}{2}$ $\Rightarrow x_2 = \frac{9}{2} = 4{,}5$. Tym samym: $x_1 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$ oraz $x_3 = \frac{1}{3} * \frac{9}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Zatem wartości zmiennych decyzyjnych, w których może istnieć ekstremum funkcji Lagrange'a są równe: $(x_1^* = 5; x_2^* = 4{,}5; x_3^* = 1{,}5)$

Warunki dostateczne istnienia ekstremum funkcji Lagrange'a (a tym samym wyjściowej funkcji kosztów K.

Analiza wyznacznika tzw. Hesjanu brzegowego **(zob. materiały wykłady „PDF") postaci:**

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Ponieważ pochodne 2-rzędu mieszane są zawsze równe zero: $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i x_j} = 0$, np. $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_2} = \frac{\partial L}{\partial x_2}(2 * x_1 - 1 - \lambda) = 0$.

Natomiast pochodne względem tej samej zmiennej wynoszą:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = \frac{\partial L}{\partial x_1}(2 * x_1 - 1 - \lambda) = 2, \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = \frac{\partial L}{\partial x_2}(2 * x_2 - \lambda) = 2, \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = \frac{\partial L}{\partial x_3}(6 * x_3 - \lambda) = 6.$$

Zauważmy, że wartość Hesjanu brzegowego $|H_3|$ nie zależy od wartości zmiennych decyzyjnych.

Z warunków dostatecznych dla zadania **na minimum** wynika, że należy jeszcze zbadać, czy wartość wyznacznika dla całego Hesjanu jest ujemna ($|H_3| < 0$) oraz czy znak jego minora $|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} < 0$ (jego wyznacznik też jest ujemny).

Ze wzorów na rozwiniecie wyznacznika 3x3 tzw. wzory metody Sarrusa: dla $|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 * 2 * 2 + 1 * 1 * 0 + 1 * 1 * 0 - (1 * 2 * 1 + 0 * 0 * 0 + 1 * 1 * 2) = -2 - 2 = -4 < 0$.

Oraz ze wzorów na rozwiniecie Laplace'a dla wyznacznika 4x4 ($|H_3|$) względem pierwszego wiersza:

$$|H_3| = 0 * (-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} + 1 * (-1)^{1+2} * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} + 1 * (-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} + 1 * (-1)^{1+4} * \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 - 12 - 4 = -28 < 0.$$

Zatem rozwiązaniem optymalnym jest nasze rozwiązanie: $(x_1^* = 5; x_2^* = 4{,}5; x_3^* = 1{,}5)$.

Należy zatem zatrudnić 5 tys. nowych pracowników w oddziałach i=1 (pierwszego kraju), 4,5 tys. Pracowników w oddziałach i=2 (drugiego kraju) oraz 1,5 tys. pracowników w oddziałach i=3 (trzeciego) kraju.

Wtedy łączne minimalne koszty zatrudnienia wyniosą:

$K^*(5; 4{,}5; 1{,}5) = 5^2 + 4{,}5^2 + 3 * 1{,}5^2 - 5 + 12 = 59$ tys. zł.